Opción A

Ejercicio n° 1 de la opción A del modelo 4, junio de 2003

Sea $Ln(1-x^2)$ el logaritmo neperiano de $1 - x^2$ y sea $f : (-1,1) \rightarrow R$ la función definida por $f(x) = Ln(1 - x^2)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0,1).

Solución

Como nos pide una primitiva de $f(x) = Ln(1-x^2)$ tenemos que utilizar el método de integración por partes.

$\int udv = uv - \int vdu$

Tomamos $u = Ln(1 - x^2)$ de donde $du = (-2u)/(1 - x^2)dx$

$dv = dx$ de donde $v = \int dx = x$

$I = \int Ln(1 - x^2)\,dx = x.\,Ln(1 - x^2) - \int x.(-2x)/(1 - x^2)dx = x.\,Ln(1 - x^2) + \int (2x^2)/(1 - x^2)dx =$

$= x.Ln(1- x^2) + 2.I_1$

$I_1 = \int (x^2)/(1 - x^2)dx$ es una integral de tipo racional y como el numerador no es de menor grado que el denominador tenemos que efectuar la división antes

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 1 - x^2 \\ \hline -x^2 + 1 & -1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$I_1 = \int (x^2)/(1 - x^2)dx = \int -1dx + \int 1/(1-x^2)\,dx = -x + I_2$

$I_2 = \int (1)/(1 - x^2)\,dx = \int 1/[(1 - x)(1+x)]\,dx = \int A/(1-x)\,dx + \int B/(1+x)\,dx = A.Ln(1- x) + B.Ln(1+x)$

Calculemos los coeficientes A y B

$1/[(1 - x)(1+x)] = A/(1- x) + B/(1+x) = [A(1 + x) + B(1-x)]\,/[(1-x)(1+x)]$, de donde igualando los numeradores tenemos

$1 = A(1 + x) + B(1 - x)$

Tomando $x = 1$ resulta $1 = 2A$ de donde $A = 1/2$

Tomando $x = -1$ resulta $1 = 2B$ de donde $B = 1/2$

Luego $I_2 = A.Ln(1- x) + B.Ln(1+x) = 1/2.Ln(1- x) + 1/2.Ln(1+x)$

Por tanto $I_1 = -x + I_2 = -x + 1/2.Ln(1-x) + 1/2.Ln(1+x)$

Y la original es $I = x.Ln(1 - x^2) + 2.\,I_1 = x.\,Ln(1-x^2) + 2.[-x+1/2Ln(1-x)+1/2.Ln(1+x)]=$

$= x.\,Ln(1 - x) - 2x + Ln(1-x) + Ln(1+x) + K$

Una primitiva es $f(x) = x.\,Ln(1 - x^2) - 2x + Ln(1-x) + Ln(1+x) + K$

Como piden la primitiva que pasa por (0,1) tenemos que $f(0) = 1$ es decir

$1 = 0 - 0 + 0 + 0 + K$, luego $K = 1$ y la primitiva pedida es

$f(x) = x.Ln(1-x^2) - 2x + Ln(1-x) + Ln(1+x)+1$

Ejercicio n° 2 de la opción A del modelo 4, junio de 2003

Se sabe que la función $f : R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx+ c$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = -1$. Conociendo además que $\int_0^1 f(x)\,dx = 6$, halla a, b y c.

Solución

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Función continua y derivable en todo $\Re$ puersto que es una función polinómica.

Como tiene un extremo en $x = 0$ sabemos que $f'(0) = 0$

Como tiene un punto de inflexión en $x = -1$ sabemos que $f''(-1) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f'(0) = 0 \rightarrow 0 = b$

$f''(-1) = 0 \rightarrow 0 = -6 + 2a \rightarrow a=3$

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + 3x^2 + c$

De $\int_0^1 f(x)\,dx = 6 \rightarrow \int_0^1 (x^3 + 3x^2 + c)\,dx = [x^4/4 + x^3 + cx]_0^1 = 1/4 + 1 + c = 6$, luego $c = 6 - 1/4 - 1 = 19/4$

La función pedida es $f(x) = x^3 + 3x^2 + c = x^3 + 3x^2 + 19/4$

Ejercicio n° 3 de la opción A del modelo 4, junio de 2003

Considera los vectores **u** = (1,1,1), **v** = (2,2,a) y **w** = (2,0,0),

(a) [1'25 puntos] Halla los valores de a para que los vectores **u**, **v** y **w** sean linealmente independientes.

(b) [1'25 puntos] Determina los valores de a para que los vectores **u + v** y **u - w** son ortogonales.

Solución

(a) **u**, **v** y **w** son linealmente independientes si y solo si det(**u**, **v**, **w**) $\neq 0$

det(**u**, **v**, **w**) = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 2(a - 2)$.

Luego si a $\neq$ 2 los vectores **u**, **v** y **w** son linealmente independientes.

(b) **u + v** = (1,7,1) + (2,2,a) = (3, 3,1+a)

u - w =(1,1,1) - (2,0,0) = (-1, 1 ,1)

Para que **u + v** y **u - w** sean ortogonales su producto escalar ha de ser cero es decir

(**u + v**).(**u - w**)= 0

(3,3,1+a).(-1,1,1) = -3 + 3 + 1 + a = 0 $\rightarrow$ a = -1 para que sean ortogonales que **u+ v** y **u- w**.

Ejercicio n° 4 de la opción A del modelo 4, junio de 2003

Sabiendo que las rectas r $\equiv$ x = y = z y s $\equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ x = -\mu \end{cases}$, se cruzan, halla los puntos A y B, de r y s respectivamente que están a mínima distancia.

Solución

Los puntos A y B que están a mínima distancia son los puntos que están en la intersección de r y s con su perpendicular común.

Tomaremos un punto genérico de la recta r, el X = (λ,λ,λ) y otro punto genérico de la recta s, el Y = (1+μ , 3 + μ , - μ), formamos el vector **XY** y le imponemos la condición de que sea ortogonal a la recta r y a la recta s a la vez, es decir a sus vectores de dirección **u** = (1,1,1) y **v** = (1,1,-1)

XY $\perp$ **n** $\rightarrow$ su producto escalar sea cero **XY.n** = 0

XY $\perp$ **v** $\rightarrow$ su producto escalar sea cero **XY.v** = 0

XY= $(1 + \mu - \lambda , 3 + \mu - \lambda , - \mu - \lambda)$

XY.n = 0 = $(1 + \mu - \lambda , 3 + \mu - \lambda , - \mu - \lambda).(1,1,1) = 1 + \mu - \lambda + 3 + \mu - \lambda - \mu - \lambda$

XY.v = 0 = $(1 + \mu - \lambda , 3 + \mu - \lambda , - \mu - \lambda).(1,1,-1) = 1 + \mu - \lambda + 3 + \mu - \lambda + \mu + \lambda$

Restando las dos ecuaciones nos queda $2(\mu + \lambda) = 0$, de donde $\mu + \lambda= 0$ y $\lambda = - \mu$.

Entrando en una de las otras dos ecuaciones nos queda

$1 + \mu - \lambda + 3 + \mu - \lambda + \mu + \lambda = 1 + \mu + \mu + 3 + \mu + \mu + \mu - \mu = 4\mu+4 = 0$,de donde $\mu = -1$ y $\lambda =1$.

Los puntos pedidos son A = X = (λ,λ,λ) = (1,1,1) y

B = Y = (1+μ , 3 + μ , - μ) = (0,2,1)

Opción B

Ejercicio n° 1 de la opción B del modelo 4, junio de 2003

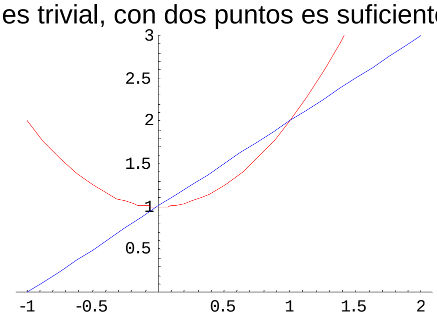
Dada la parábola $y = 1 + x^2$ y la recta de ecuación y = 1 + x, se pide:

(a) [1'5 puntos] Área de la región limitada por la recta y la parábola.

(b) [1'25 puntos] Ecuación de la recta paralela la dada que es tangente a la parábola.

Solución

(a)La gráfica de la parábola $1 + x^2$ es igual que la de x^2 pero desplazada una unidad hacia arriba en ordenadas, y la de la recta y = 1+x es trivial, con dos puntos es suficiente.



Para determinar el área vemos los puntos de corte de la recta con la parábola para lo cual igualamos sus ecuaciones y loas resolvemos

$1+x^2 = 1+x \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0$ de donde x = 0 y x = 1, luego

Área = $\int_0^1 [(1+x) - (1+x^2)]dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = [x^2/2 - x^3/3]^1_0 = 1/2 - 1/3 = 1/6$ u.a.

(b) Como es tangente a la recta y =1+x tienen igual pendiente que es y ' = 1
Calculamos la pendiente genérica de $y = 1 + x^2$ y la igualamos a la anterior para calcular la abscisa del punto donde me piden la recta tangente a la parábola
y ' = 2x
Igualando 2x = 1 $\rightarrow$ x = 1/2
La recta tangente en x = 1/2 es y - f(1/2) = f '(1/2)(x – 1/2)
$f(x) = 1+ x^2 \rightarrow f(1/2) = 1+ 1/4 = 5/4$
f '(x) = 2x $\rightarrow$ f '(1/2) = 2(1/2) = 1
La recta tangente pedida es y – 5/4 = 1(x - 1/2)

Ejercicio n° 2 de la opción B del modelo 4, junio de 2003

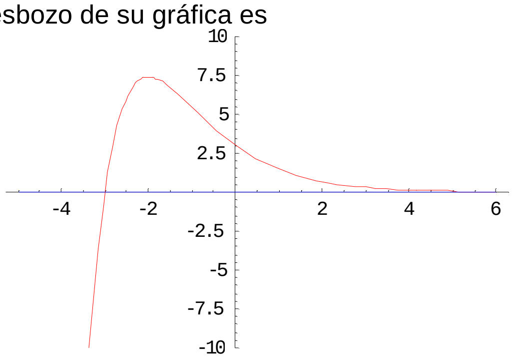
Considera la función $f : \Re \rightarrow \Re$ definida por $f(x) = (x+3).e^{-x}$
(a) [0'5 puntos] Halla las asíntotas de la gráfica de f
(b) [1'5 puntos] Determina los extremos relativos de f y los puntos de inflexión de su gráfica.
(c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.

Solución

(a) Como $\lim_{x\rightarrow +\infty} (x+3)\, e^{-x} = \lim_{x\rightarrow +\infty} (x+3)/(e^x) = \infty / \infty$, le aplicamos la regla de L'Hopital
$\lim_{x\rightarrow +\infty} (x+3)/(e^x) = \lim_{x\rightarrow +\infty} (1)/(e^x) = 1 / \infty = 0$, por tanto la recta y = 0 es una asíntota horizontal de f en $+\infty$
$\lim_{x\rightarrow -\infty} (x+3)/(e^x) = \lim_{x\rightarrow +\infty} (-x+3)/(e^{-x}) = \lim_{x\rightarrow +\infty} (-x+3).(e^{+x}) = -\infty.\infty = -\infty$
(b) $f(x) = (x+3)/(e^x)$
$f'(x) = [1.e^x - (x+3).e^x]/(e^{2x}) = [e^x.(-x-2)]/(e^{2x})$
f '(x) = 0 $\rightarrow$ - x - 2 = 0, puesto que la exponencial nunca se anula, de donde x = - 2 es el posible máximo o mínimo.
Como f '(3) > 0, f(x) es creciente en $(-\infty, -2)$
Como f '(0) < 0, f(x) es decreciente en $(-2,+\infty)$
Por definición x = -2 es un máximo relativo, puesto que a su izquierda y próximo crece y a su derecha decrece, que vale $f(-2) = 1/e^{-2} = e^2 \cong 7'39$

$f'(x) = [e^x.(-x-2)]/(e^{2x})$
$f''(x) = [\{e^x.(-x-2)+ e^x(-1)\}.e^{2x} - e^x.(-x-2).2.e^{2x}]/(e^{4x}) =$
$= [e^{3x}.(-x-2-1+2x+4)] / (e^{4x}) = [e^{3x}.(x+1)] / (e^{4x})$
f ''(x) = 0 $\rightarrow$ x + 1 = 0, puesto que la exponencial nunca se anula, de donde x = - 1 es el posible punto de inflexión.

Como f ''(-2) < 0, f(x) es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, -1)$
Como f ''(0) > 0, f(x) es convexa ($\cup$) en $(-1,+\infty)$
Por definición x = -1 es un punto de inflexión, porque en el la función pasa de cóncava a convexa, que vale $f(-1) = 2/e^{-1} = 2e^1 \cong 5'44$
(c) Con los datos anteriores un esbozo de su gráfica es



Ejercicio n° 3 de la opción B del modelo 4, junio de 2003

Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula indicando las propi9edades que utilices:
(a) [0'S puntos] El determinante de A^3.
(b) [0'5 puntos] El determinante de A^{-1}.
(c) [0'S puntos] El determinante de 2A.
(d) [1 punto] El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente $3C_1 - C_3$, $2C_3$ y C_2.

Solución

(a) $|A^3| = |A|.|A|.|A| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes

(b) Como $A.A^{-1} = I \rightarrow |A.A^{-1}| = |I| = 1 = |A|.|A^{-1}| = 5.|A^{-1}| \rightarrow |A^{-1}| = 1/5$

El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes

El determinante de la matriz unidad es 1

(c) $|2A| = 2^3.|A| = 8.5 = 40$

Al multiplicar 2 por la matriz aparece 2 multiplicando a cada columna. Al calcular el determinante si una columna está multiplicada por un número dicho número puede salir factor común fuera del determinante multiplicando al determinante. Como hay tres columnas, sale el 2 tres veces multiplicando que es 2^3.

(d) $|3C_1 - C_3, 2C_3, C_2| = (1) =$

$= |3C_1 - C_3, C_2, 2C_3| = (2) =$

$= 2.|3C_1 - C_3, C_2, C_3| = (3) =$

$= 2.|3C_1, C_2, C_3| - 2.|C_3, C_2, C_3| = (4) =$

$= 6.|C_1, C_2, C_3| - 0 = 6.5 = 30.$

Propiedades utilizadas

(1) Si cambiamos entre sí dos columnas el determinante cambia de signo.

(2) Si una columna está multiplicada por un número dicho número puede salir fuera del determinante factor común multiplicando al determinante.

(3) Si una columna de un determinante es suma de dos sumandos dicho determinante es igual a la suma de dos determinantes colocando en dicha columna el primer y segundo sumando respectivamente.

(4) Si un determinante tiene dos columnas iguales el determinante es cero y además si una columna está multiplicada por un número dicho número puede salir fuera del determinante factor común multiplicando al determinante.

Ejercicio nº 4 de la opción B del modelo 4, junio de 2003

Determina el punto P de la recta $r \equiv (x - 1)/2 = (y + 1)/1 = z/3$ que equidista de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z + 3 = 0$ y π_2

$$\equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ x = -6 + \mu \end{cases}$$

Solución

Un punto genérico de recta es $P = (1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda.)$

Ponemos el plano $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ x = -6 - \mu \end{cases}$ en forma continua .

Un punto es (-3,0,-6) y dos vectores paralelos son (1,-1,0) y (0,1, -1) .

Luego la ecuación continua es

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y & z+6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (x+3)(1) - y(-1) + (z+6)(1) = x + y + z + 9 = 0$$

$d(P, \pi_1) = |1 + 2\lambda - 1 + \lambda + 3\lambda + 3| / \sqrt{3} = |6\lambda + 3| / \sqrt{3}$

$d(P, \pi_2) = |1 + 2\lambda - 1 + \lambda + 3\lambda + 9| / \sqrt{3} = |6\lambda + 9| / \sqrt{3}$

Como equidista lo igualamos

$|6\lambda + 3| / \sqrt{3} = |6\lambda + 9| / \sqrt{3}$ de donde $|6\lambda + 3| = |6\lambda + 9|$, por tanto tenemos dos opciones

1.- $(6\lambda + 3) = +(6\lambda + 9)$, simplificando obtenemos 3 = 9, lo cual es absurdo.

2.- $(6\lambda + 3) = -(6\lambda + 9)$, simplificando obtenemos $12\lambda = -12$, de donde $\lambda = -1$, y el punto pedido es

$P = (1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda) = (1 + 2(-1), -1 + (-1), 3(-1)) = (-1. -2,-3).$